После касания окружности с бо́льшим радиусом величина r с возрастанием φ убывает, и, следовательно, $d\varphi = -f(r)\,dr$, а значит,

$$\varphi = \Delta\varphi - \int_{r_2}^{r} f(r)\,dr = \Delta\varphi - \int_{r_2}^{r_1} f(r)\,dr -$$
$$- \int_{r_1}^{r} f(r)\,dr = 2\Delta\varphi - I(r), \quad \Delta\varphi \leqslant \varphi \leqslant 2\Delta\varphi. \tag{9.18}$$

При дальнейшем увеличении угла φ, рассуждая, как и ранее, имеем

$$\varphi = 2\Delta\varphi + I(r), \quad 2\Delta\varphi \leqslant \varphi \leqslant 3\Delta\varphi,$$
$$\varphi = 4\Delta\varphi - I(r), \quad 3\Delta\varphi \leqslant \varphi \leqslant 4\Delta\varphi.$$

Сравнивая эти два равенства с соотношениями (9.17) и (9.18), видим, что функция $r = r(\varphi)$ периодическая, а угол $2\Delta\varphi$ является ее периодом. Построение функции $r = r(\varphi)$ сводится, таким образом, к вычислению интеграла (9.17).

Если угол $2\Delta\varphi$, соответствующий возвращению на окружность, с которой началось движение, может быть представлен в виде

$$2\Delta\varphi = 2\pi k/n,$$

где k и n — целые числа, то при n-м возвращении угол φ изменится на $2\pi k$. Это означает, что точка возвратилась в исходное положение. Траектория движения является в этом случае замкнутой кривой. Как показали исследования интеграла (9.17), это возможно при произвольном c только при $\Pi = -\mu/r$, $\Pi = kr^2/2$, где μ и k — некоторые положительные постоянные.

Отметим одно важное свойство функции $r = r(\varphi)$. Если произвести замену $\varphi_1 = -\varphi$, т. е. изменить направление положительного отсчета угла φ, то исходное дифференциальное уравнение сохранит форму, так как $(dr/d\varphi)^2 = (dr/d\varphi_1)^2$. Остальные рассуждения при построении функции $r = r(\varphi_1)$ аналогичны приведенным, и поэтому $r(\varphi_1) = r(\varphi)$, т. е.

$$r(\varphi) = r(-\varphi). \tag{9.19}$$

Таким образом, функция $r = r(\varphi)$ является четной и, следовательно, легко продолжается в область отрицательных значений угла φ.

Рассмотрим теперь движение точки по построенной траектории. Начальными данными в рассматриваемой задаче являются величины φ_0, $\dot\varphi_0$, r_0, $\dot r_0$. Постоянные E_0 и c, которые определяют форму траектории, характеризуются значениями $\dot\varphi_0$, r_0, $\dot r_0$. Величина φ_0 зависит от выбора начала отсчета угла φ. Выбор этот является произвольным, поэтому числовое значение угла φ_0 не является существенным в данной задаче. Напомним, что

для удобства построения кривой $r = r(\varphi)$ было принято, что угол φ отсчитывается от точки, в которой $r = r_1$, а $dr/d\varphi = 0$. Наличие интеграла площадей указывает на то, что величина $\dot\varphi$ при движении имеет тот же знак, что и $\dot\varphi_0$. Будем считать, что выбранное направление отсчета угла φ таково, что при движении угол φ возрастает. При таком подходе начальная точка на кривой $r = r(\varphi)$ определяется значением r_0 и знаком $\dot r_0$.

Отметим точки пересечения кривой $r = r(\varphi)$ с окружностью $r = r_0$. В одних из них $\dot r > 0$, а в других — $\dot r < 0$. Любая из данных точек, знак $\dot r$ которой совпадает со знаком $\dot r_0$, может быть принята за начальную точку траектории. Для определенности при $\dot r_0 > 0$ начальной считаем точку, которая соответствует наименьшему значению угла φ_0. Обозначим этот угол через φ_0^*.

Так как $r(\varphi) = r(-\varphi)$, то $\dot r(\varphi) = -\dot r(-\varphi)$. Поэтому при $\dot r_0 < 0$ начальной можно считать точку, соответствующую углу $\varphi = -\varphi_0^*$.

Рассмотрим второй случай, когда $P(r_1) = 0$, $r_1 < r_0$, $P(r) > 0$, $r_1 < r < +\infty$.

Кривая $r = r(\varphi)$, построенная по формулам (9.17) и (9.19), имеет в данном случае только две точки пересечения с окружностью $r = r_0$ при $\varphi = \varphi_0^*$ и $\varphi = -\varphi_0^*$ соответственно. Если $\dot r_0 > 0$, то точка монотонно удаляется в бесконечность. В случае $\dot r_0 < 0$ при выходе из точки $(r_0, -\varphi_0^*)$ величина r сначала убывает с возрастанием φ, затем точка касается окружности $r = r_1$ и далее монотонно удаляется в бесконечность.

В третьем случае, когда $P(r_2) = 0$, $r_0 < r_2$, $P(r) > 0$, $0 < r < r_2$, начало отсчета угла φ целесообразно связать с точкой, в которой $r = r_2$, а $dr/d\varphi = 0$. Кривая $r = r(\varphi)$ при этом задается соотношениями

$$\varphi = \int_{r}^{r_2} f(r)\,dr, \quad \varphi \geqslant 0, \quad r \leqslant r_2,$$
$$r(\varphi) = r(-\varphi), \quad \varphi \leqslant 0.$$

При $\dot r_0 > 0$ точка в процессе движения касается окружности $r = r_2$, а затем начинает монотонно приближаться к центру. При $\dot r_0 < 0$ приближение начинается сразу. В полях, на которые при некоторых начальных данных распространяется третий случай, возможно падение точки на центр.

Четвертый случай, когда уравнение $P(r) = 0$ не имеет положительных корней, не является характерным, и поэтому на нем останавливаться не будем.

Движение точки под действием силы, пропорциональной расстоянию. Простейшим примером центрального потенциального поля является поле, в котором сила задается в виде $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$,

$\lambda = -k = \text{const}$. При $k > 0$ материальная точка притягивается к неподвижному центру, а при $k < 0$ — отталкивается от него. Как следует из формулы (9.15), потенциальная энергия в данном случае $\Pi = kr^2/2$.

Рассмотрим уравнение $P(r) = 0$. Имеем

$$E_0 - \frac{kr^2}{2} - \frac{mc^2}{2r^2} = 0,$$

или

$$kr^4 - 2E_0r^2 + mc^2 = 0, \tag{9.20}$$

откуда

$$r^2_{1,\,2} = \frac{E_0 \mp \sqrt{E_0^2 - mc^2k}}{k}.$$

Как известно, при любых a и b справедливо неравенство

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab, \tag{9.21}$$

поэтому, учитывая, что

$$v^2 \geqslant r^2\dot{\varphi}^2 = c^2/r^2, \tag{9.22}$$

при $k > 0$ имеем

$$E_0^2 = \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{mc^2}{2r^2} + \frac{kr^2}{2}\right)^2 \geqslant mc^2k.$$

Отсюда следует, что в случае притяжения точки к центру ($k > 0$) величины r_1^2 и r_2^2 являются действительными положительными числами.

Траектория движения, лежащая между концентрическими окружностями с радиусами r_1 и r_2, строится по формуле (9.17). В данном случае получаем

$$\varphi = c\sqrt{m}\int_{r_1}^{r} \frac{dr}{r\sqrt{2r^2E_0 - kr^4 - mc^2}} = \frac{c\sqrt{m}}{2}\int_{r_1^2}^{r^2} \frac{d(r^2)}{r^2\sqrt{2r^2E_0 - kr^4 - mc^2}}.$$

Известно, что

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2a + bx}{x\sqrt{b^2 - 4ac}}, \tag{9.23}$$
$$a < 0, \quad b^2 - 4ac > 0,$$

поэтому

$$\varphi = \frac{1}{2}\arcsin\left.\frac{E_0r^2 - mc^2}{r^2\sqrt{E_0^2 - mc^2k}}\right|_{r_1^2}^{r^2}. \tag{9.24}$$

Учитывая свойства корней уравнения (9.20)

$$r_1^2r_2^2 = \frac{mc^2}{k}, \quad r_1^2 + r_2^2 = \frac{2E_0}{k}, \quad r_2^2 - r_1^2 = \frac{2\sqrt{E_0^2 - mc^2k}}{k},$$

выражение (9.24) представляем в виде

$$\varphi = \frac{1}{2}\arcsin\frac{r^2(r_1^2 + r_2^2) - 2r_1^2r_2^2}{r^2(r_2^2 - r_1^2)} + \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда следует, что

$$-\cos 2\varphi = \frac{r^2(r_1^2 + r_2^2) - 2r_1^2r_2^2}{r^2(r_2^2 - r_1^2)}$$

или

$$r^2(r_2^2 - r_1^2)\sin^2\varphi - r^2(r_2^2 - r_1^2)\cos^2\varphi = r^2(r_1^2 + r_2^2) - 2r_1^2r_2^2,$$

откуда окончательно получаем

$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{r_1^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{r_2^2} = 1.$$

Учитывая формулы $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, связывающие полярные координаты с декартовыми, имеем

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1. \tag{9.25}$$

Таким образом, при притяжении к центру с силой, пропорциональной расстоянию, траекторией движения при любых начальных данных является эллипс с полуосями r_1 и r_2. При $c \to 0$, когда $r_1 \to 0$, данный эллипс вырождается в отрезок длиной $2r_2$.

Если $k < 0$, то первый корень r_1^2 уравнения (9.20), рассматриваемого как квадратное уравнение относительно r^2, положителен, а второй r_2^2 — отрицателен. Отсюда следует, что уравнение $P(r) = 0$ при $k < 0$ имеет один положительный корень $r = r_1$, причем такой, что $P(r) > 0$ при $r > r_1$.

Как уже было показано, в этом случае траектория является кривой, уходящей в бесконечность. Уравнение данной кривой задается той же формулой (9.24). Только теперь при переходе в этой и в следующих формулах к r_1^2 и r_2^2 следует помнить, что в данном случае величина r_2^2 отрицательна.

В обозначениях $r_1^2 = a^2$, $r_2^2 = -b^2$ уравнение (9.25) записываем в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, при отталкивании от центра с силой, пропорциональной расстоянию, траекторией движения является гипербола, а точнее, ее правая ветвь, так как $r = r_1$ при $\varphi = 0$.

Общие свойства кеплеровского движения. Излагаемая теория движения материальных тел в центральном потенциальном поле создавалась и развивалась в основном в связи с изучением движения небесных тел под действием сил их взаимного притяжения. В соответствии с законом всемирного тяготения любые два материальных тела действуют друг на друга силами, пропорциональными их массам и обратно пропорциональными